上越数学教育研究，第 21 号，上越教育大学数学教室，2006 年，pp.55-68.

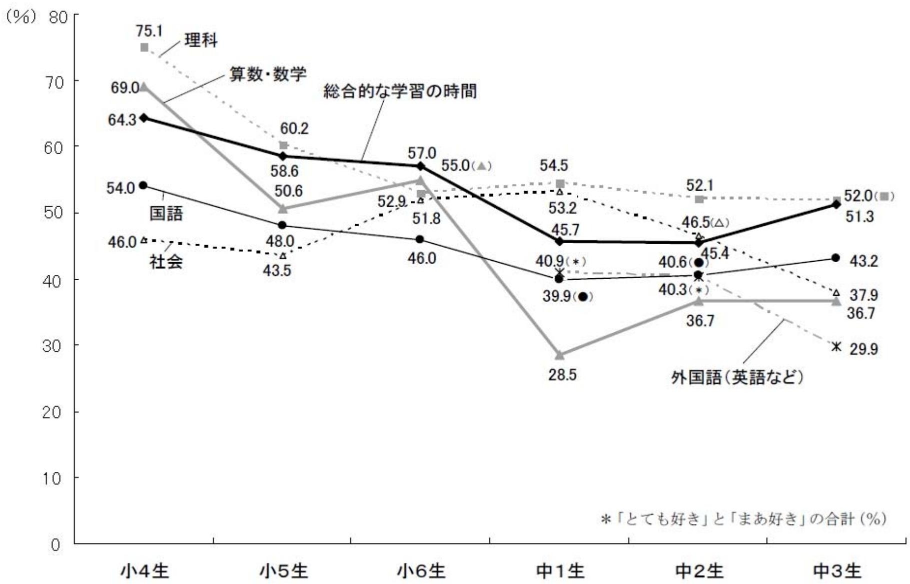
中学数学への接続を視点とした算数の授業改善に関する研究

榧　根　　浩
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

筆者は，これまでに小学校の教育現場で，算数的な活動を大切にし，具体物を対象にしながら授業を進めてきた．そこで学習した子供たちが中学校へ進学し，数学の授業の感想を聞くと「小学校の時は算数が好きだったけれど，中学校の数学は嫌いだ．」「数学は，覚えることばかりで難しい．」といった声が多く聞こえる．このような実態から，筆者が取り組んできた算数の授業の在り方は，本当にこれでよいのかと不安にさえ感じられるようになってきた．これまであまり意識してこなかったが，小学校で算数を学んでいる子供たちは皆中学校へと進学し，そこで数学を学ぶのである．その時，子供たちは何らかの困難を感じているのである．

文部科学省は平成１７年３月から４月にかけて「義務教育に関する意識調査」を行っている．義務教育に関する評価や期待，子どもの家庭での生活状況などを調査することを目的としている．その中で，注目したいのは，小中学生を対象に行った，「教科や活動の時間の好き嫌い」の調査結果である．(【図 1】参照) 学年別では，算数・数学は，他教科と比べても学年による変動が激しい．小学４年生から小学５年生での差が 18.4 ポイントの減少，小学６年生から中学１年生での差が 26.5 ポイントの減少となっている．この減少の様子は，他教科と比べても非常に急激である．



【図 1】教科や活動の時間の好き嫌い（学年別）

この結果から，小学４年生から小学５年生の間，小学６年生から中学１年生の間に，算数・数学が嫌いになり，その度合は他教科と比べても顕著に表れているということが分かる．そこには，好きではなくなる要因が何かしら存在していると推測することができる．

この問題に対して，中学校の側からはいくつかの改善がなされているが，小学校の側からの改善については非常に少ない．このような実状を受けて，本研究の目的は，中学校数学への接続を視点として算数の授業改善についての示唆を得ることとする．

２．接続について

2.1.接続の必要性について

そもそも，算数と中学数学は，どちらも数学という体系の中に位置付けられている．ただ単に計算を行う手順を学習するのではなく，考え方を学習することを含んでいる．しかし，最近の小学校の算数の授業では，計算手続きの習得に力点が置かれている傾向がある．確かにそれも大切な観点ではあるが，数学という学問を学ぶことは，それだけではなく，その手続きのアイデアがどのように生まれてきたのか，また，本当にそのアイデアが正しいのかを考えることが重要である．現在の算数教育ではその部分が軽視されているのではないだろうか．

このことについて，Carpenter 他(2003)は，算数の学習は，他の関連した数学的アイデアから切り離されていると指摘している．例えば，75 ＋ 48 ＋ 25 を計算するときに，ある子どもは 75 ＋ 48 を計算し 123，123 ＋ 25 ＝ 148 と答を導いたとしよう．これは，計算の手続きが強調されすぎていて，数学的なアイデアが活用されていない姿であると考えることができる．では，数学的アイデアを活用して，75 ＋ 25 を先に計算したとしよう．確かにこの場合は，正解を得ることができるが，なぜ，たし算やかけ算の場合はよくて，引き算やわり算の場合はだめなのかを説明できる子どもは非常に少ないだろう．このことは，数学的アイデアが暗黙的な知識として使われていることを示していると考えることができる．

つまり，算数の学習の中で，計算の手続きを身に付けることだけにとどまらず，その学習に埋め込まれた数学的アイデアを発展させることによって，中学数学への接続が可能になるだけでなく，算数の学習においても，有効に活用することができると考えた．

2.2.接続の意味について

では，接続するとはどういうことであろうか．本研究においては，接続するということを関係付けることとして捉えていく．つまり，中学数学への接続とは，「算数を中学数学へと関係づける」ことと置き換えることができる．そう考えると，算数の何を中学数学の何へと関係づけるのだろうか．そのことを明らかにするために，榧根(2005)では，算数と中学数学の特徴（相違）について対置する形で取り上げてきた．そして，【図 2】のような，算数と数学の特徴が明らかになった．そこで，次章では，先行研究をもとに，これらの特徴を視点とした接続の方法についての理論的な考察を行っていきたい．

	算数	中学数学
<カリキュラム理念> →	実用性・生活性	教養性・学問性
<考え方> →	帰納的	演繹的
<式の扱い> →	操作的	構造的
<図形の扱い> →	イメージ的	構造的

【図 2】

３．接続の方法についての理論的考察

まず，学問としての数学について考察してみよう．算数と中学数学を含む数学の学習について，Lampert(1990)は，

学習という用語は，「知識を獲得する活動」と「獲得した知識」の両方を含んでいる．

と説明している．つまり，数学の学習とは，獲得した知識を指すだけではなく，その知識を獲得するために行っている活動をも含んでいることを示している．

3.1. 知識の接続

最初に，「獲得した知識」を接続する視点について考察していきたい．

2.1.では，算数の学習が他の関連したアイデアから切り離されていることについて，Carpenter 他 (2003) を引用し述べた．ここでは，この問題に対する改善策について述べていく．

2.2.で明らかになった特徴を見ると，式の扱いとして，算数では操作的，中学数学では構造的であることがわかる．Carpenter 他 (2003) が述べた問題点というのは，これらの特徴が切り離されたままであることが原因ではないだろうか．そこで，それらの特徴を結びつけるのではなく，算数にも中学数学にもどちらの特徴が存在していて，それらの特徴が移行するものと捉えることによって，接続が図られるものと考える．

Carpenter 他 (2003) は，この問題に対する改善策として関係的な考え方を発達させるための文脈の重要性について述べている．ここでは，Carpenter 他 (2003) が取り上げたプロトコルをもとに，クラス全体で関係的な考え方に取り組ませることができる文脈を考察していきたい．

F 先生のクラスでは，数式が正しいかどうかの考察を行っている．

① １２－９＝３

② ３４－１９＝１５

③ ５＋７＝１１

この３つの数式の考察については，子どもたちは左辺を計算することによってその真／偽を説明している．

④ ５８＋７６＝３５４

この数式の考察では，概算することによって，その間違いを指摘している．つまり，計算の必要性を次第に弱めさせている．

⑤ ２７＋４８－４８＝２７

この数式の考察では「48 をたしてもう一度同じものをとってしまうのだから」同じになると説明している．すべてを計算してその正しさを説明しているものではなくなってきている．

⑥ ３４５＋５６８－５６８＝３５３

この数式の考察では，⑤と同じ理由で間違いであると説明している．

ここまでで，数式の真／偽を判断するために，生徒は必ずしも計算する必要がないということを確定させている．このあとは，実際のプロトコルをもとに考察を進めていきたい．

Ms.F：これはどう？全部足したり引いたりせずにすることができる？

⑦ ４８＋６３－６２＝４９

Jana：その数はさっきみたいに同じじゃないから，計算しなきゃ駄目だ．

Sarah：*それらは同じではないけれど，ほとんど一緒だよ．６３足して６２引く．それは１を足すことと同じだから，正しいわ．*

Ms.F：もう一つありますよ．

⑧ ６７４＋５６－５９＝６７１

Raymond：*あぁ，それは正しいね．足している分より３つ多く引いているから，答えは３小さくならなければならないよ．*

Sarah や Raymond は，数式を関係としてとらえている．左辺の過不足を考えて，それに見合うように右辺を計算している姿であると捉えることができる．

このクラスでは，④の問題で，概数の計算によって真偽を判断するところから，関係的な考え方に移行しはじめていることがわかる．さらに，⑤の問題では明らかに計算より，

その関係を考えることに有効性を見出してきいる．このことが，Sarah や Raymond の関係的な考え方を引き出したのだろうと考えられる．つまり，⑤の問題を文脈に入れることによって，手続き的な考え方から関係的な考え方へスムースに移行することができたのである．

Carpenter 他（2003）では，関係的な考え方を授業を通してクラス全体の子どもに提供する文脈について具体的に示された．実際に子どもがどのように変容をしていったのか見取ることができた．その中で，今後筆者が授業実践を設計する上で，いくつかの重要な示唆を得ることができた．１つ目は，子どもたちが取り組む文脈の中に関係に目を向けるような要素を盛り込むことである．この研究では，式の真／偽を問う問題や式の中にある□に当てはまる数を問う問題が使われていた．そのような問題は，式の中にある関係に目を向けやすいだけでなく，児童がそれらを使って，どのように理解しているのかを表現するために非常に有効に働いていた．２つ目は，それらの問題を効果的に配列していたことである．例えば，計算をしなくても関係をみることによって容易に答えがわかる問題（５＋16 ＝ 15 ＋□や 27 ＋ 48 － 48 ＝ 27）を効果的に配列している．そのことによって，子どもは自然と関係に目を向け，それらについて議論を行うことための根拠になっていた．

これらの点を考慮に入れながら授業を設計することによって，算数と中学数学の特徴である式の操作的な扱いから構造的な扱いへスムースに移行を行うことができると考える．

3.2. 活動の接続

次に，「知識を獲得する活動」を接続する視点について考察していきたい．Lampert（1990）は，「知識を獲得する活動」は，「数学する（doing mathematics）」活動と置き換えることができるとも述べている．ここでは，数学する（doing mathematics）」活動について考察していきたい．

これまで筆者が行ってきた算数の授業は，あらかじめ確定していることを，いくつかの経験を通して定義していく活動が多かった．教師は，子どもが答えを導くに至った根拠を尋ねているにもかかわらず，その根拠の正しさについて追求することは少なかった．小学校で行われている実際の授業も，教科書と教師の説明によって構成されている場合が多いことを見ても明らかである．そのことについて Lampert（1990）は，次のように説明している．

> 学校経験においては，「数学する（doing mathematics）」ことは，教師の定めたルールに従うことを意味し，「数学をわかる（kowing mathematics）」ことは，教師の発問の新しいルールを思い出しあてはめることを意味している．真理は，教師が解答を認めたときに決まる．

では，学校数学においてはどのような「数学する（doing mathematics）」活動が重要なのであろうか．この疑問に対して，Lampert（1990）は，「数学する」ためのよりよい方法は，学問として「数学する」方法であると主張している．ここでいう「数学する」とは，結論の修正と仮定の修正の間のジグザグの歩みである．考え方の正統性は，教師でも教科書でもなく推論と数学的議論をもとに考えられると説明している．

つまり，帰納的な観察と演繹的一般化とのあいだを往き来することによって，真理を見付けていく活動が学校数学においても行われることが重要であることがわかる．２．２で明らかになった帰納的，演繹的という特徴が切り離されるのではなく，活動そのものが往き来することによって，スムースに移行することができると考える．

3.2.1. 帰納的な活動について

最初に，帰納的な活動について考察してい

きたい．Polya（1954）は，次のように帰納的手段に典型的と思われる特徴を見出している．

> 一つの推測を考えついてから，我々はそれが真であるか誤りであるかを見いだそうとつとめた．我々の推測は，それの成り立っている若干の特別な例によって暗示された一つの一般的命題であった．我々はさらに多くの特別な場合を調べた．調べられたすべての例について結局推測が真であることが明らかになったので，推測に対する我々の信頼が増した．

そして，この二つのグループに区別された特別な例を，前者を推測を暗示したもの，後者を推測を支持したものであると説明している．

このことは，帰納的な活動を考察する上でとても重要な視点となっている．例えば，これまでは，偶数は，２，４，６，８，…で，どれも２で割ってみると全部割り切れる．だから，偶数は２で割りきれる数である．これを，帰納的活動として捉えていた．しかし，Polya（1954）の視点で考えていくと，子どもは，２÷２＝１，４÷２＝２，…となり，どうも偶数は２で割ることができそうだと推測するだろう．これが，事実へ暗示的に接触している段階である．他の偶数も同様のことがいえるのではないかと考え，24 ÷２＝ 12，もっと大きい数だとどうだろうと 102 ÷２＝ 51，248 ÷２＝ 124 ここまでくると，これは間違いなく偶数は２で割れる数だと確信を持つことができるだろう．これが，事実へ支持的に接触している段階である．そして，より大きな偶数を作り出さなくてはならなくなる．□×２でその偶数を作り出していくようになり，このことが偶数は２の倍数になりそうだという次の推測につながっていく．事実に働きかけることによって推測が生まれ，その推測を確かなものにするために再び事実に働きかけ推測が修正されていく．この活動が，「数学する（doing mathematics）」活動と捉えることができる．このように，子どもの帰納的な活動を，事実を発見するための活動と事実を確かめるための活動に区別してみる視点を持つことによって，事実を説明し，証明していこうとする演繹的な活動につなげることができると考える．

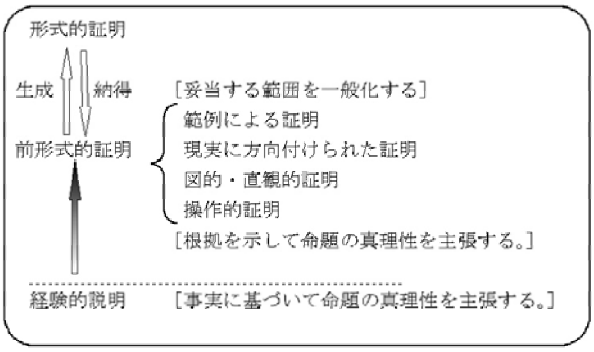
3.2.2. 演繹的な活動について

次に，演繹的な活動について考察していきたい．私を含め多くの小学校教員は，演繹的な活動というと中学校で行っている図形の論証指導をイメージするであろう．しかし，この捉えでは，小学校で行われるであろう演繹的な活動を中学校のような図形指導と限定して捉えてしまう．では，演繹的な活動の本質とは何だろうか．そのことについて de Villiers（1998）は以下のように説明している．

> 「この結果が起こりうるすべての場合に対して真であるということを確かめることはできない．だから，そのことを絶対的に確実にするためには，（演繹的に）証明しなければならない.」という代わりに「詳細な実験的な探求から，今や私たちは，この結果が真であることを知っています．それがどうして真であるのかを他のよく知られている幾何学的諸結果を用いて説明できるかどうか，言い換えれば，それがこれらの他の諸結果からのようにして論理的に帰結されるかということを調べてみましょう.」ということによって，生徒たちは証明がもっと有意味であることを見出すはずである．

この視点は，数学する（doing mathematics）活動を考察する視点として重要である．算数でもどうしてなのかよく知っていることを使って説明してみようという活動は行われている．しかし，これが，演繹的な活動の本質であると見られていないのが現実である．そこで，この視点をもとに算数の授業を分析することによって，今まで見過ごされた中学数学へ接続する数学的思考が明らかになると考える．

しかし，いきなり小学生に論理的な説明を求めることは困難を伴うであろう．そのことについて國本（1995）は，証明の水準を【図 3】



【図 3】

のように捉えている．そして，いきなり形式的証明を行うには無理があることから，前形式的証明を十分に行う必要性を述べている．意識的に前形式的証明を行うことが，形式的証明へスムースに移行するために重要であると述べている．つまり，算数において操作や図・直観を「よく知っていること」と捉え，それをもとに説明していくという活動が，重要であると考えることができる．

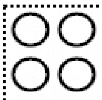
また，梅川(2001)は，action proof について，その意味を「必ずしも厳密な数学的証明ではなく，命題が成り立つ根拠を具体的な操作活動を基にして，自分なりに納得し，相手を説得するための proof strategy」であると説明している．これは，前形式的証明の中の，操作的証明にあたると考えられる．このことから，小学校において，演繹的な活動を行うためには,形式的な証明にはいかないまでも，その前段階，つまり命題が成り立つ根拠を具体的な操作活動を基にして考える段階が重要であることがわかる．

４．接続の方法についての実証的な検討

4.1. 実践の概要

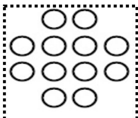
本実践では，課題は，大きく分けて４つ提示した．課題①，②，③は，図形をもとに式で表す課題である．１時間目は，主にこのことについて考えた．２時間目は，１時間目に考えたことをもとに，規則的に考えると次に来るドット図（課題④）の個数について考えた．

（１）課題①


課 題 ①

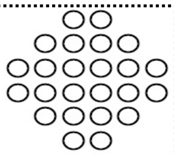
最初に，課題①を見せて，「ドットの数はいくつですか」と問いかけた．すぐに，個数を求めることができた．そこで，「今日は，式で個数を表すことにしましょう.」と教師（筆者）が提案した．子どもは，ドット図に書き込みをしながら，それぞれの考えを発表した．

（２）課題②


課題②

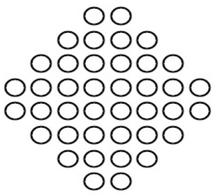
次に，課題②を見せて，「これはどうですか.」と問いかけた．まず，個数を確認してから．式で表していった．ここでは，同じ式でも，違った考え方もあるということが全体で確認された．

（３）課題③


課題③

そこで，課題③を提示し，その個数を予想させた．全体で確認した後に，「どのように式に表したかな.」と問いかけた．ここでは，少し時間をとり，自分の考えを紙に書かせた．その後，全体で議論する場面に移っていった．ここで１時間目の授業が終わった．

（４）課題④


課題④

２時間目になり，休憩中に考えていた子どもの考えなどを取り上げていく中で，①，②，③の課題が同じに見えてきたという発言を取り上げ，そのつながりについて議論していった．

同じに見えるということが同意されたところで，教師（筆者）は「次はあるかな」と問いかけた．すると，あるかもしれないと考えた子どもがほとんどであった．そこで，「この先は，いくつ？」と問いかけた．そこでの議論は，式や図形を根拠にするものではなかったことから，次の図形を予想させることが

難しいと考え，「(この先の図形を) 作ってみよう.」と働きかけた.

4.2. 分析の目的と方法

今回の授業実践の目的は，式そのものを考察の対象としたり，パターンの一般化を促すような実践を行うことによって，子どもたちができることや，何に興味を持つかを明らかにすることであった．そして，ドット図の個数を式で表すという活動を設定することによって，式だけではなく，そのイメージである図形も関連づけて考察できるようにした.

そこで，課題④に取り組んでいるときの子どもの様子についてプロトコルや，子どもが記述したプリントをもとに分析を行っていく.

また，今回の授業実践からは，数学する(doing mathematics)活動をおこなっている子どもの姿も見えた．そこで，Ue という子どもに焦点を当てその子どもの活動がどのように変化していったか，プロトコルや Ue が記述したプリントをもとに分析を行っていく.

4.3. 計算のための式から考察の対象としての式へ

最初に，式そのものを考察の対象としていた子どもの分析を行っていく．ここでは，課題③の次のドット図の個数を考察する場面を分析していく.

①，②，③の図形についてその個数を式で表す活動を行ったあと，この先の図形（４番目）について考えさせた。その個数をたずねたところ，「倍になっているから４８個。」「１２ずつ増えるから３６個。」といった数の規則性から答えを求めようとしていた。式から４番目の図形を予想することが難しいと感じたので，まず，４番目の図形を作るように指示した。Ma は，そのドット図を自ら作り上げた。みんなでその個数を数えてみると４０個になり，最初の予想とちがっていた。

4.3.1. イメージ的な見方から構造的な見方への変容

そこで，筆者は，①～④の図形を指して「この仲間にきまりはあるのかな.」と聞き，自力解決の時間をとった。

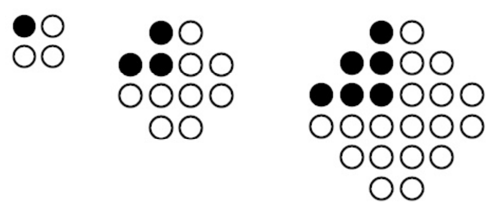
To と Wa は，それぞれの用紙に【図 4】

４×１＝４
４×３＝１２
４×６＝２４
４×１０＝４０

【図 4】

のように，式をたてに書いて２人で考えていた。図ではなく，この３つの式の間にあるきまりを見つけようと話し合っていた。このことは，具体的な図から離れて式をもとに話し合っている姿であると捉えられる。つまり，その規則を図というイメージ的なものから式という構造的なものへと変わっていったことがわかる.

そこで，筆者は，【図 4】にある１，３，６を指して，これらは何かとたずねた。To は，それぞれ【図 5】の①の●，②の●，③の●を指して「これ」といった。筆者が「それって何？」とさらに問いかけた。少し悩んでいたので，筆者が他の部分を指で隠し，●のところだけを見せて同じように問いかけ



【図 5】

た。すると，【図 6】のように，１＋２，１＋２＋３と用紙に記入し始め，最後に１と記入した。

このことは，教師の問いかけに答える形ではあるが，式をもとにして図を見直し，これ

４×１＝４　　１
４×３＝１２　１＋２
４×６＝２４　１＋２＋３

【図 6】

まで自分の頭の中にあったことを整理し，式表現を修正している姿と捉えられる。

4.3.2. 構造的な見方をさらに拡げる姿

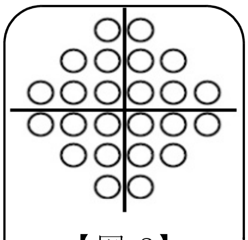
自力解決の時間が終わり，全体での話し合いになった。何人かの子どもが発表した。

To と Wa は，黒板の前で，①は４×１，②は４×（１＋２），③は４×（１＋２＋３），④（４番目）は４×（１＋２＋３＋４）と説明した。多くの子どもが納得しない様子だったので，筆者は彼らのノートと同じように，式を【図 7】のように並べ替え，何がきまり

４×１＝４
４×（１＋２）＝１２
４×（１＋２＋３）＝２４
４×（１＋２＋３＋４）＝６０

【図 7】

なのか２人に聞いた。２人は相談して，【図 8】を指して，括弧の中が４つに分けた１つ分であることを説明した。同じように，③，④についても４つに分けて説明した。多くの子どもがこの考えに納得をしたので，筆者は，「次はいえそう？」と問いかけた。To は，次は 60 個，その次は 84 個と答えた。これは，式をもとにして考察し，次のドットの個数を求めている姿と捉えることができる．そして，５番目や６番目のドットの個数を答えていることからもわかるように，その中から一般性を見出している．



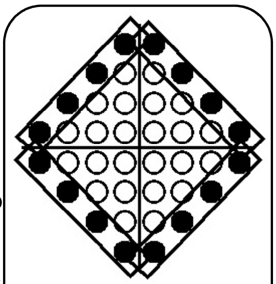
【図 8】

このことは，授業後のノートからもみることができる．To と Wa のノートには，【図 9】

４×１＝４
（１）
４×３＝１２
（１＋２）
４×６＝２４
（１＋２＋３）
４×１０＝４０
（１＋２＋３＋４）
４×１５＝６０
（１＋２＋３＋４＋５）
４×２１＝８４
（１＋２＋３＋４＋５＋６）

【図 9】

が記述されていた。このことは，式それ自体を対象として捉え，さらに先の式を予想している姿であると捉えられる。Er は，全体の話し合いで To と Wa の考えを聞いたことによって，中心から広がる考えを思いついた。そして，【図 10】を書き，増える部分について規則性を見つけた。授業後の感想には，「次（に増える数は）は５×４で考えられそうだ」と自分の考えをもとに，先の形について考えることができた。このことは，「周りに広がる。」という考えをもとに，To・Wa の考えを聞くことで，図そのものの構造を捉え直し，その規則性に着目することができた姿と捉えた。



４×４＝１６

【図 10】

4.3.3. 考察

授業後，この２人だけではなく全員に，今日の学習でわかったことや感想を書いてもらった。「たぶん，後は４×（１＋２＋３＋４＋５）とか，＋６，＋７でも（答えが）でてくると思います。」「この式（To と Wa の式）は，その先の求め方もわかるし，次の数もわ

かるからとってもお得な式だと思った。」と，具体的に式で考えるよさを書いていた子どもが多かった。

これらのことから，計算のための式から，対象としての式への変化を引き起こすために重要なことがわかった。

一つ目は，学習過程に先を考える（一般化）という文脈を入れたことである。つまり，関係が見えてくるような課題配列を行ったことによって，考える対象をドット図から自分たちが求めてきた式それ自体に変える必要を感じることができたと考える。

二つ目は，より複雑な対象化が考えられる課題を提示することである。例えば，ドット図の変わり方がすぐに見えるものや，ドットの数が２，４，６，８，10 …と偶数個であるなど見てすぐわかるのではなく，ドット図の変わり方が複雑なことが，式をもとにもう一度図を見直し，これまでの式表現を修正しようとする姿につながったと考える。

三つ目は，ドットの個数が通常の数列の規則で考えにくかったことである。４番目のドットの数を考えるとき，数の規則性だけでは解決できなかったことから，式それ自体を対象にすることができたと考える。また，授業後の感想から，式それ自体を対象として考えることの意義に気付いた子どもが多かったこともわかった。

これらのことが，Lampert（1990）が述べている「獲得した知識」を発展させるための方策であるだろう．先を考えられる文脈を取り入れ，すぐにはその規則性に気付くことができない構造を埋め込んだ授業を構成することが，これまでに「獲得した知識」を子ども自ら発展させるために重要であろう．

4. 4. 帰納的な活動から演繹的な活動へ

今回の授業実践は，「計算のための式」から「考察の対象としての式」へと式の見方を拡張させていくことを目的とした．４．３では，見方を拡張させた子どもの姿を分析することができた．これは，Lampert（1990）が述べている「獲得した知識」を接続させる試みである．

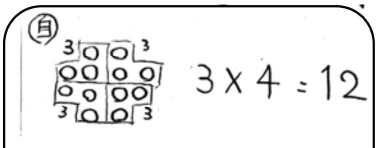
一方で，Lampert（1990）は，学習という用語の中には，「知識を獲得する活動」も含まれていると述べている．そこで，今回の授業実践を「数学する（doing mathematics）」活動を分析する視点として，帰納的な活動と演繹的な活動を取り上げ分析していきたい．

今回の授業実践では，ドットの個数を出すために用いる式が，課題①，課題②，課題③と進むにつれて，前の課題で使った式を考察の対象として次の課題に取り組むことができる課題配列にしている．このような課題に取り組む中で，子どもは自然と帰納的に考え，先を見通しながら活動を進めることができると考える．そのような帰納的な活動を十分に行うことによって，どのような演繹的な活動が展開されるのか分析していきたい．そこで，ここでは，Ue の活動を分析してきたい．

4. 4. 1. 暗示的に接触している場面と支持的に接触している場面

【課題②のドットの個数を式で表す場面】

このドット図の個数の求め方について話し合っている場面で，Ue はノートに書いてある【図 11】を参照しながら，

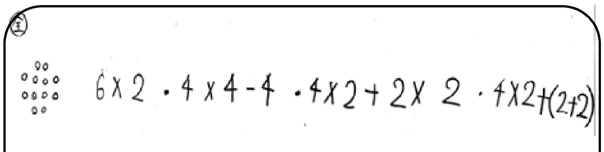


【図 11】

101	Ue	はい。L 字形に分けると，その形が３つが４つあるので，ドットが３つのかたまりが４つあるので３×４にして１２になりました。

と全体の前で説明している．このとき Ue は，

課題に対してドットの個数を式で表す方法について考察していることがわかる．さらにノートには，【図 11】に自と書き，自分の考えと分けるように【図 12】に全と書いて，全体の考えとして記録していた．このことによって友達の考えを共有し，他の場合についても考察する助けになっていると捉えることができる．

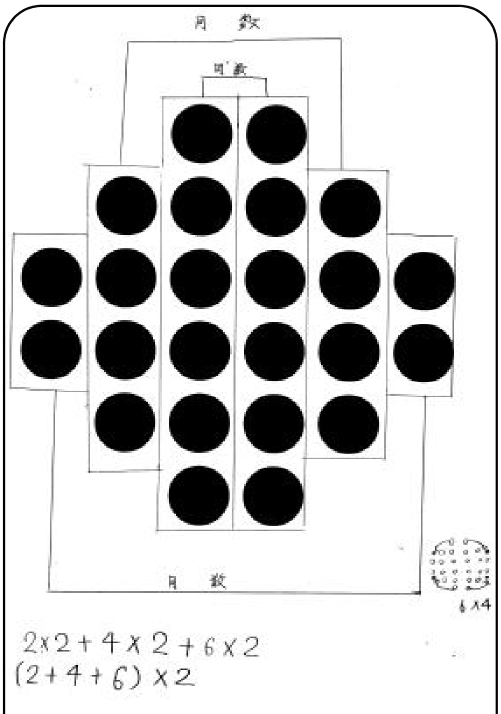


【図 12】

このとき，Ue は事実に対して，暗示的に接触している段階と判断することができる．規則性を見つけるために様々な式で表す方法を考えているわけではないが，推測をたてる準備段階にあると考えることができる．

【課題③のドットの個数を式で表す場面】

次にこの課題に対して，Ue は【図 13】のように考え，次のように発言を続けた．



【図 13】

276	Ue	うんと，私は，式が２通りあるんですけど，同じような式なんですけど，
277	T	聞いてみようね。
278	Ue	１つは２×２＋４×２＋６×２
279	T	２×２＋４×２＋６×２
280	Ue	（２＋４＋６）×２
281	T	（教師板書）（２＋４＋６）×２

Ue は，②の課題では図形を４つに分ける方法を考え，③の課題では，図形を２つに分ける方法で考えている．２つに分ける方法は，【図 12】の全の中にみんなの考えとして記録してある４×２＋２×２と対応しており，課題②で話し合った内容からこの方法を選択したことが考えられる．これは，事実へ暗示的に接触している段階からから支持的に接触している段階へと移り変わろうとしている場面であると捉えることができる．つまり，課題②の時に出てきた２つに分ける方法だと，課題③も解決することができそうだと推測を持って取り組んでいる姿と捉えることができる．

【④のドットの個数を考える場面】

そのあとに，次の図形のドットはいくつになるかという課題をだした．すると，次のような議論が教室の中で起こった．

473	Sa	３６
474	T	ほうほうほう，どうして３６だと思った？
475	Sa	全部４の倍数だと思った。
476	T	あっ。４，１２，２４，３６くる。なるほど。
477	T	Ue さんは？
478	Ue	私も同じで，４に３をかけると１２になってまた，今度４に６かけると２４で，また，３ずつ倍にして行くじゃないかなと考えて，４×９は３６としました。
479	T	３，３，３だから３６…あぁ。
480	T	俺違う。どうぞ
481	Na	俺４８だと思う。
482	T	４８うん。（４８板書）どうしてどうして？

483	Na	いやぁ，１２から２４が倍になったのが気になって，

Ue は，次の図形のドット図を考える場面で，数の規則性に着目し№.478 と発言した．ここまでは，式をもとに考えていたのに，この議論の中では，４→ 12 → 24 →？という数の規則性をもとにして考えようとした．

これは，事実に暗示的に接触している段階であると捉える．ここまで式で表すことを操作的に行ってきたが，まだ明確な推測を持っているわけではなかった．その結果，その推測に自信を持つことができず，議論の流れから数の規則性で考えることを選択し，この事実に暗示的に接触している姿と捉えることができる．

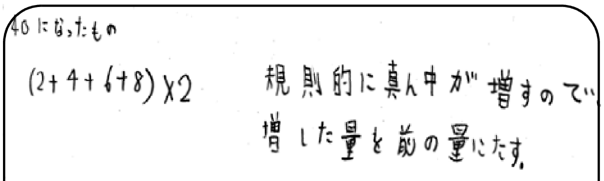
【④のドット図を実際に書く場面】

このままでは，これまで求められた式を使ってドットの個数を見付けることが難しいと考え，実際に次の図形④を書いてみようと子どもに働きかけた．この課題に対して，Ue は次のように発表した．

553	T	じゃあ，Ue さんどうぞ。あなたの考え。
554	Ue	（前に歩きながら説明を始める）うんと，ここに，この図があって，全部同じようにここのまん中の２列を消すと前の１２になって，１２のまん中のこの２列を消すと４になるからまん中がこの１本が２つずつ増えていくからこの２列よりも４つ大きい数を，えっ，あれっ，
555	T	うんいいよ。
556	Ue	この１列に，たてに２つたしたものを２列をまん中に入れれば次の数になるんじゃないかなと思いました。
557	T	わかった？よく今がんばって聞いたね。ありがとう戻って。
558	T	今説明凄くいい説明だったね。まん中にがばっと入れるんだって。２つ増やした数だよな。これを入れるんだって。
559	T	そうすると，この図形ができたよ。と言っています。

ここでは，ドットの増え方について図をもとにして説明している．これは③の課題に対して【図 13】で考えた方法を使っている．つまり，２つに分けて考えるという推測を持ちながら④の課題に取り組んでいる姿と捉えることができる．これは，事実に対して支持的に接触している姿と捉えることができる．

【実際に書くことができた④のドットの個数を考える場面】



【図 14】

さらに，その個数の確認について議論が進むと，Ue は【図 14】を参照しながら次のように話した．

607	T	じゃあ，先に Ue さんから聞いていくね。はい，どうぞ。
608	Ue	えっと，（その場に立って）ほんと，さっきの説明と同じなんですけれど，（歩きながら前にでて）まず，まん中のこの２列が増えているから，法則的には，この２列が増えていくことになって，さっきのかきかたと同じようにこの２列のまん中の２列を増やして，ここの，このまん中の１２に２をたした１６をこの２４にたして４０になると法則でわかっ，法則でこうなるかなと思いました。
609	T	わかった？さっきの法則のつけ足しだったね。ありがとう。
610	T	それでたぶんいくだろう。
611	T	じゃあ，この図だな。あぁ，こうやって，折ってな，あーぁ，こんな，いい，凄いモデルを作ってくれたよ！やる？（前で提示するように促す。）
612	Ue	前にでる。
613	T	やって見せてあげてよ，みんなに今の。
614	T	凄いよこれ，これ見りゃすぐわかるよ。
615	Ue	まず，これ，最初に４になっていて，

616	T	次に１２になって次に，２４になるからまん中に…をたすと４０になる。わかった？これわかりいいよな。拍手でてる拍手。拍手！すごーい。こんなにいいモデルができたんだ。すごいね。
617	T	これでいけば法則ができるということだね。なるほど，まん中を増やしていく。これもいいかもしれません。

Ue は，これまでの図形におけるドットの増え方に着目することによって，法則という言葉を使って見つけたきまりを説明している．④という課題に取り組むのに③までで考えた方法の確かさを確認するために操作を行い，きっとこうなるはずだという確信を持っている．これは Polya のいう事実に支持的に接触している姿と捉えることができる．また，発言するときも黒板にでてから話すのではなく，歩きながら説明を始めている．このことは自分が見つけた法則について確信を持ち，早くみんなに伝えたいという気持ちの表れであったと考えられる．そして，№ 615 では，真ん中２列のドットを折り込み，それが増えていく過程を操作によってみんなに明らかにしている．

この Ue の活動は，事実に対して暗示的に接触することと支持的に接触することを交互に行っているように見える．最初は，その見通しが立たず，何とか式で表してみた．②，③と課題に取り組んでいくうちに，だんだんとその式での表し方に規則性が見えてきた．でも，なかなか確信が持てない段階で，④の個数を聞かれたので，新たな考え方である数の規則性を根拠に考えを述べた．しかし，確かめてみると，その考え方では解決することができなかった．そこで，式を対象にして考えてみたら，どうも確信が持てそうだ．実際に数を数えてみたらやっぱり予想通りだった．Ue の中ではこのような思考が起こっていたと考えられる．このように暗示的に接触する段階と支持的に接触する段階を繰り返す活動が重要で，そのことが次で述べる演繹的な活動につながっていくものであると考える．

4.4.2. 演繹的な活動をはじめている場面

もう一度，【図 14】を見てみよう．このとき，Ue は，次のような式で表現している．

（２＋４＋６＋８）×２

Ue は，この段階では，もうこの方法に確信を持っている．しかし，それは，

①（２）×２
②（２＋４）×２
③（２＋４＋６）×２
④（２＋４＋６＋８）×２

のように，かっこの中が規則的に増えていたことが根拠ではなく，

〈規則的に真ん中が増すので，増した量を前の量にたす.〉

が根拠であった．つまり，①，②，③で図形的に明らかになったことを根拠に④を説明している．これはまさに de Villiers が述べている演繹的活動であろう．自分の推測に確信を持ったとき,それを説明する方法として，これまでに明らかになったことを使い，説明している姿と捉えることができる．

また，〈**規則的に真ん中が増すので，増した量を前の量にたす**〉という根拠は，図をもとに説明を行っている．その増え方を図の変わり方をもとに説明することによって，前形式的証明を行っていると捉えることができる．このような活動を十分に行うことで，形式的証明につながるであろう．

この視点で見ていくと，まだまだ，演繹的な活動をはじめている姿はまだ見られる．その段階を教師が見取り，活動のよさを実感させることが，算数の段階での演繹的な考え方を高める上で非常に重要なことであると考える．

4.4.3. 考察

これらの分析から，算数において「数学する（doing mathematics）」活動そのものが，数学の学問的な活動と整合し，帰納的な活動から演繹的な活動へ移行するために必要な視点が見えた．この実践は，学習内容に焦点を当て，「獲得した知識」をどのように発展させていけばよいかという形で組んでいる実践で，「数学する（doing mathematics）」活動を意識して組んだ実践ではないが，その視点で見ても，帰納的な活動から演繹的な活動につながる場面が明らかになった．

まず，帰納的な活動の捉えである．Polya（1954）がいう事実に暗示的に接触している段階と，事実に支持的に接触している段階を区別して捉えることの重要性がわかった．事実に暗示的に接触している段階では，子ども自身の中にまだ確信が持てずにいる段階とも捉えることができる．その段階で，根拠を求めていっても子どもは戸惑うだけであろう．しかし，事実に支持的に接触している段階で根拠を求めた場合は，自分なりの根拠を何とか表現しようと子どもの活動が変わってくると考えられる．

そこで，演繹的な活動の捉えが重要になってくる．算数の段階では，よく知っていることを根拠に説明している姿を，演繹的な活動と捉えることが重要である．Ue が図形を操作してその増え方を説明したことが國本（1995）がいう前形式的証明と捉えることができるであろう．このような活動を小学校でも十分に行うことによって，形式的証明への移行がスムースになるであろう．

そして，教師が，帰納的な活動の中の事実へ支持的に接触する段階を意識し，そのよさを子どもに伝えることによって，子どもはよく知っていることをもとに考察することにつながる．そして，友だちに伝える場面では，その事実の根拠を図的に説明したり，操作をもとに説明したりする姿につながると考える．そのことが，帰納的活動から演繹的活動へ移行させるのに重要な視点となるであろう．

5．まとめと今後の課題

本研究では，算数と中学数学の相違について理解を深め，それをもとに中学数学への接続の視点を明確にし，算数の授業改善についての示唆を得ることを目的とした．そして，実際に授業実践を分析することによって，必要な視点とその方法について明らかにしてきた．その中で，今後の指導への示唆を得ることができた．

一つは，先を見通していける学習過程を構成することである．そうすることによって，子ども自らその一般性に気付き，その考えが正しいことを説明しようとする姿につながると考える．もう一つは，教師が，子どもの姿をどのように捉えるかということである．事実に暗示的に接触している段階や支持的に接触している段階は，これまでの授業の中でも現れていた姿であったと考える．その姿は，どうして現れたのかを明らかにしなかったばかりに，事実に暗示的に接触している段階でとどまってしまい，活動が発展しなかったことがあったのではないだろうか．このことは，実際に教育現場で指導にあたる小学校教員がこの視点に気付いていない現実に起因すると考えられる．おもしろい授業だということがわかっても，どこがおもしろいのか，どうしておもしろいと感じるのかについて検証することがなかった．つまり，そこが明らかにならなかったことによって，帰納的な活動が暗示的に接触している段階で終わってしまい，発展的に捉えられなかった実践があったのだろうと考える．それらのことから，帰納的な活動の中の事実へ支持的に接触する段階を意識し，そのよさを子どもに伝えることを行っていく必要がある．

これらのことから，我々小学校教員が算数

の授業を行う場合に，「数学する（doing mathematics)」という視点を意識的に持つということが重要であることがわかる．

今回は，式に焦点を当てて授業実践をして，分析を行った．しかし，他の領域を見ても子どもが困難を感じているところが多く見られる．例えば，図形の捉えや関数の捉えである．このような他領域の内容についても，今回得た示唆をもとに実践を行い，さらに多くの授業改善における示唆を得ることが今後の課題である．

引用・参考文献

G. Polya.(1954).Induction and analogy in mathematics:Mathematics and plausible reasoning ; v. 1(pp.1-34) .Princeton University Press.（柴垣和三雄訳.(1974).帰納と類比:数学における発見とはいかになされるか１,pp.1-37.丸善.）

Magdalene Lamport.(1990).When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer:Mathematical Knowing and Teaching.*American Educathional Reserch Journal Vol.27,No.1*,29-63.（秋田喜代美訳.(1995).数学が分かることと数学を教えること.学びへの誘い,pp.189-240.東京大学出版会.）

Michael de Villiers.(1998) .An Alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry.*DESIGNING LEARNING ENVIRONMENTS FOR DEVELOPING UNDERSTANDING OF GEOMETRY AND SPACE*(pp.369-393).Mahwah,NJ:LEA.

Thomas P.Carpenter ,Megan Loef Franke and Linda Levi.(2003).Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.Heinemann.

橋本是浩・礒田正美・飯島康之・能田伸彦・狭間節子・風間喜美江.(1995)論証導入期の指導について.第 28 回数学教育論文発表会論文集.，pp.401-406.

平林一榮.(1984).中等数学学習の可能性－一つの提言－.西日本数学教育学会発表資料

平林一榮.(1986).数学教育の有効性のために.奈良教育大学紀要 35-2，pp.1-17.

平林一榮.(1987).数学教育の活動主義的展開.東洋館出版社.

平林一榮.(1991).数学嫌いにするための算数教育.新教育課程の実践と数学的な考え方・問題解決，pp.1-29.東洋館出版社.

平林一榮.(1993).算数教育についての理解.皇學館大學講演叢書 71.皇學館大學出版部.

藤井斉亮.(1998).「文字式」の理解に関する一考察－疑変数について－.第 31 回数学教育論文発表会論文集，pp.123-128.

藤澤利喜太郎.(1895).算術条目及教授法.丸善.

一松信.(1979).新数学事典.pp.843-884.大阪書籍株式会社.

岩崎秀樹・岡崎正和.(1999).算数から数学への移行について －代数和の位置づけとその指導－.全国数学教育学会数学教育学研究第 5 巻，pp.85-90.

片桐重男.(1988).数学的な考え方・態度とその指導１数学的な考え方の具体化.明治図書.

榧根浩.(2005).中学数学への接続を視点とした算数の授業改善に関する研究.上越数学教育研究第 20 号，pp.153-162

国立教育政策研究所.(2005).平成１５年度小・中学校教育課程実施状況調査結果の概要.

小山正孝.(2002).数と計算・代数の認識に関わる基礎理論の検討.第 35 回数学教育論文発表会論文集「課題別分科会」，pp.84-88.

小山正孝.(2003).「計算のきまり」の指導のねらいと内容.第 36 回数学教育論文発表会論文集「課題別分科会」，pp.106-109.

國本景亀(研究代表者).(1995).空間直感力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善.平成６～７年度文部省科学研究費補助金　一般研究（C).課題番号　06680256.

前田隆一.(1995).小・中学校を一貫する初等図形教育への提言.東洋館出版社.

三輪辰郎.(1996).文字式の指導序説.筑波数学教育研究第 15 号，pp.1-14.

文部省.(1999).小学校学習指導要領解説算数編.東洋館出版社.

文部省.(1999).中学校学習指導要領解説数学編.大阪書籍株式会社.

文部科学省.(2002).個に応じた指導に関する指導資料－発展的な学習や補充的な学習の推進－（小学校算数編）.教育出版株式会社.

文部科学省.(2005).義務教育に関する意識調査.

佐藤英二.(1995).藤沢利喜太郎の数学教育論の再評価－「算術」と「代数」のかかわり－.第 28 回数学教育論文発表会論文集，pp585-590.

塩野直道.(1970).数学教育論.新興出版社啓林館.

数学教育学研究会編.(1991).新算数教育の理論と実際.誠文社.

田中博史.(2001)子どもの思考過程が見えてくる算数的表現力を育てる授業.東洋館出版社.

梅川貢司.(2001).数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究－中学３年生を対象にした調査を手がかりにして－.上越教育大学大学院修士論文.